Увод у подударност

Подударност је основна релација.
Ако за четири тачке A,B,C,D важи d(A,B)=d(C,D)кажемо да су дужи AB и CD подударне (једнаке) и пишемо AB=CD.

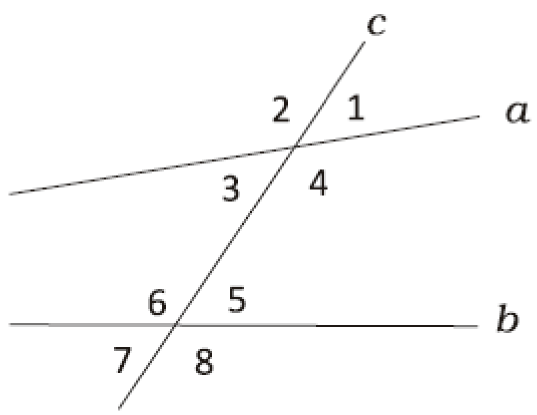
Дефиниција: $M\text{-}N\text{-}P, MN=a \wedge NP=b \Rightarrow MP=a+b$.
Примери:
1. За дате дужи a,b конструисати дужи: $2a, a+b, a-b, 2a+b, \ldots$
2. За дате углове a,b;b>a конструисати углове 2a,a+b,b-a,...
3. Ако је дат угао од 19° конструисати угао од 1°.

Дефиниција: Угао који је једнак свом напоредном углу је **прав угао**.

Врсте углова по величини: **нула угао**, **оштар**(већи од 0°, а мањи од 90°), **прав** (=90°), **туп** (већи од 90°, а мањи од 180°), **опружен** (=180°), **неконвексан** (већи од 180°, а мањи од 360°), **пун** (=360°) и **уопштен** (већи од 360°) (илустровати цртежом)

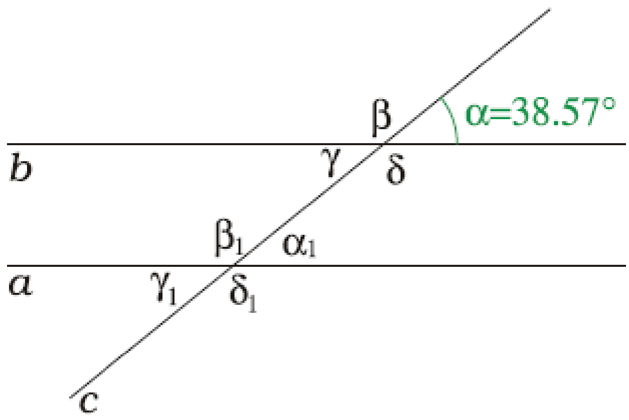
Теорема: Дате су тачка A и права a у равни α. Кроз тачку A може се поставити једна и само једна права која је нормална на дату праву.

Ако две праве a,b пресечемо трећом c, праву c зовемо **трансверзала**.
Углове 1,2, 7 и 8 зовемо **спољашњи**, а углови 3,4,5 и 6 су **унутрашњи** (у односу на транверзалу).

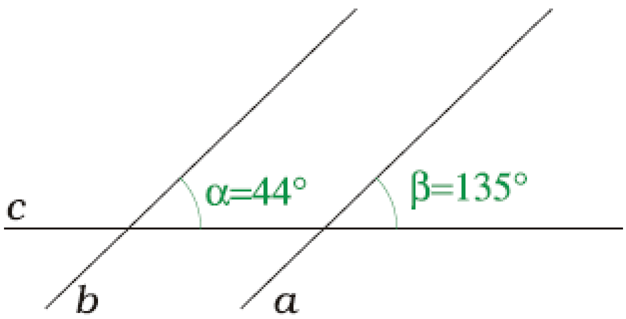


Сагласни: са исте стране трансверзале, један спољашњи, један уну-
трашњи. Нпр. 3 и 7.
Наизменични: са различитих страна трансверзале, оба спољашњи или оба унутрашњи углови.
Нпр. 4 и 6.
Супротни: са исте стране трансверзале, оба спољашњи или оба уну-трашњи углови. Нпр. 1 и 8.

Теорема: Ако је $a||b$онда су једнаки сагласни и наизменични углови, а супротни углови су суплементни. Важи и обрнуто (једнакост углова повлачи паралелност правих.)
Задаци:
1. Израчунати све углове са слике ако је $a||b$.

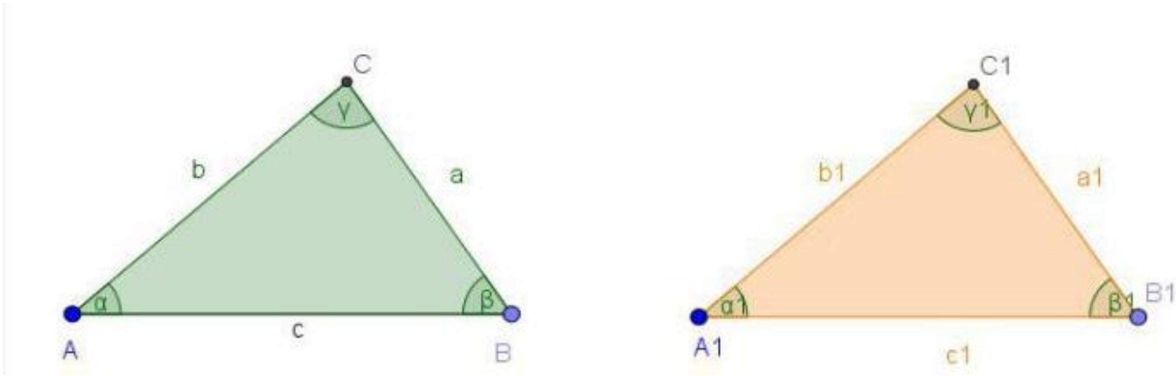


2. Да ли су паралелне праве a,b?



Ставови о подударности троуглова

Шта су подударни троуглови?
$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow (AB=A_1B_1\ ,\ AC=A_1C_1\ ,\ BC=B_1C_1\ ,\ \alpha=\alpha_1\ ,\ \beta=\beta_1\ ,\ \gamma=\gamma_1)$

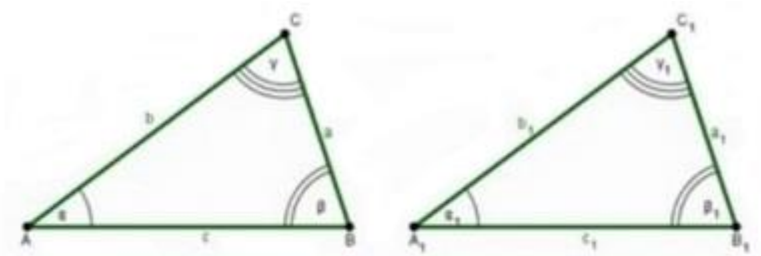


Подударност троуглова:

Теорема: Ако постоји изометрија која фигуру $F1$ пресликава у фигуру $F2$, тада кажемо да су **фигуре подударне** и записујемо $F1 \cong F2$.
Теорема: Подударност фигура је релација еквиваленције.

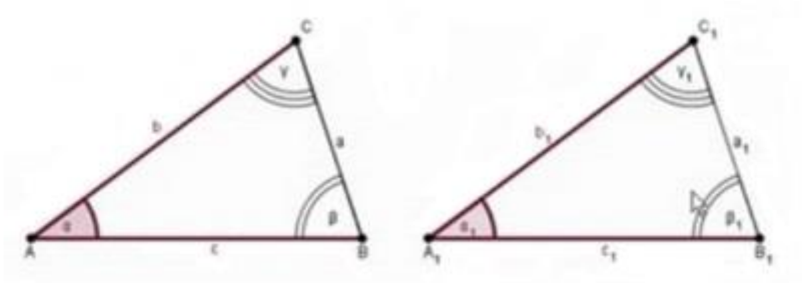
Ставови о подударности троуглова:

Теорема (ССС): Два троугла су подударна акко су странице једног троугла једнаке одговарајућим страницама другог троугла.



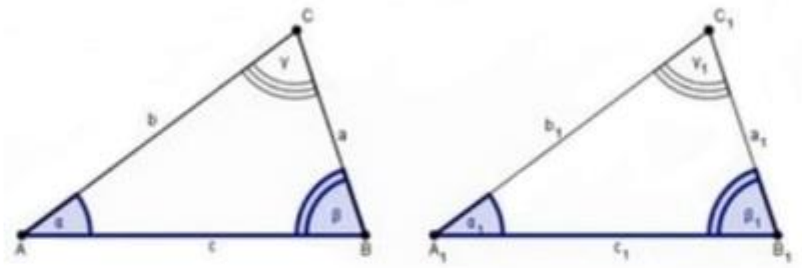
$$\left.\begin{aligned} a &= a_1 \\ b &= b_1 \\ c &= c_1 \end{aligned}\right\} \overset{\text{sss}}{\Rightarrow} \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$$

Теорема (СУС): Два троугла су подударна акко су две странице и угао захваћен њима једног троугла једнаки одговарајућим елементима другог троугла.



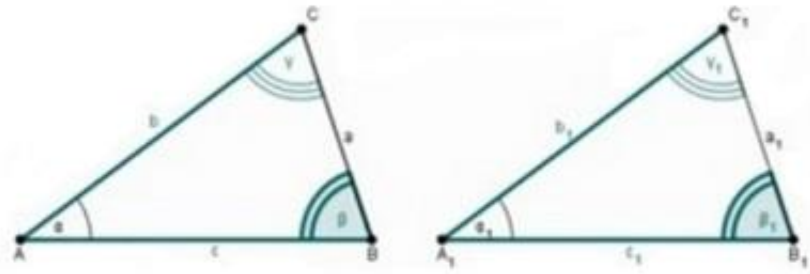
$$\left.\begin{array}{l} b=b_1\\ c=c_1\\ \alpha=\alpha_1\end{array}\right\}\overset{\text{sus}}{\Rightarrow}\Delta ABC\cong\Delta A_1B_1C_1$$

Теорема (УСУ): Два троугла су подударна акко су једна страница и на њу налегли углови једног троугла једнаки одговарајућим елементима другог троугла.



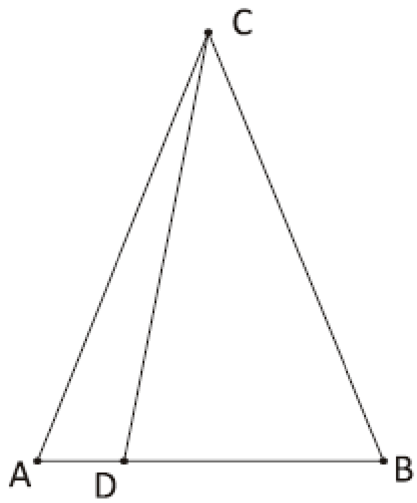
$$\left.\begin{array}{l} \alpha=\alpha_1\\ \beta=\beta_1\\ c=c_1\end{array}\right\}\overset{\text{usu}}{\Rightarrow}\Delta ABC\cong\Delta A_1B_1C_1$$

Теорема (ССУ): Два троугла су подударна акко су две страница и угао наспрам једне од њих једног троугла једнаки одговарајућим елементима другог троугла, а углови наспрам друге две странице су исте врсте (оба оштра, права или тупа).



$$\left.\begin{array}{l} b = b_1 \\ c = c_1 \\ \beta = \beta_1 \\ \gamma, \gamma_1 \ \text{su iste vrste} \end{array}\right\} \overset{\text{ssu}}{\Rightarrow} \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$$

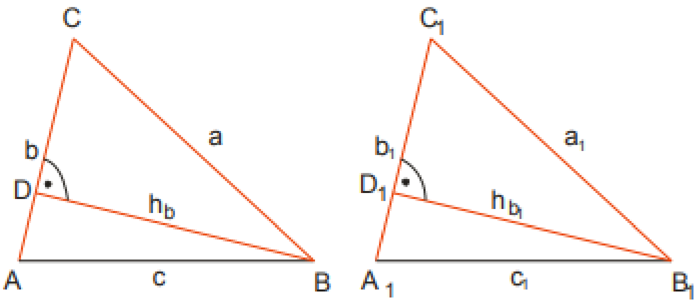
Зашто морају углови бити исте врсте: У једнакокраком троуглу на основици AB је дата тачка која није средиште основице. Троуглови који се тако добијају очигледно нису подударни иакоимају једнаке две странице и угао наспрам једне од њих. Уколико је тачка средиште основице углови су једнаки пошто су оба права.



Primer 1.

Dokazati da su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ podudarni kada su im jednaki sledeći odgovarajući elementi:

$a = a_1, b = b_1, h_b = h_{b_1}$



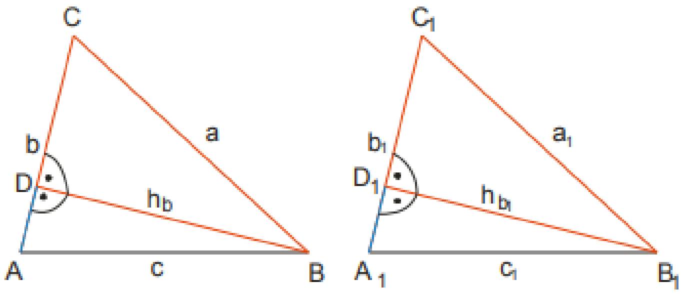
Uvek prvo dokazujemo za delove koji se " više šarene" !

Dakle prvo dokazujemo da je $\triangle DBC \cong \triangle D_1B_1C_1$

Moramo da nadjemo tri elementa koja su jednaka I da kažemo koji je stav u pitanju!

$$\left.\begin{array}{l} a = a_1 \\ h_b = h_{b_1} \\ \measuredangle D = \measuredangle D_1 = 90^0 \end{array}\right\} \xrightarrow[SSU]{} \triangle DBC \cong \triangle D_1B_1C_1$$

E sad , odavde moramo izvesti neki zaključak koji će nam pomoći da dokažemo da je $\triangle DBA \cong \triangle D_1B_1A_1$



Ovde je taj zaključak da je $AD = A_1D_1$ jer je $AC = A_1C_1$ dato u zadatku a mi smo dokazali da je $DC = D_1C_1$

Sad možemo dokazati da je $\triangle DBA \cong \triangle D_1B_1A_1$

$$\left.\begin{array}{l} AD = A_1D_1 \\ h_b = h_{b_1} \\ \measuredangle D = \measuredangle D_1 = 90^0 \end{array}\right\} \xrightarrow[SUS]{} \triangle DBA \cong \triangle D_1B_1A_1$$

Iz svega sledi da je $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$

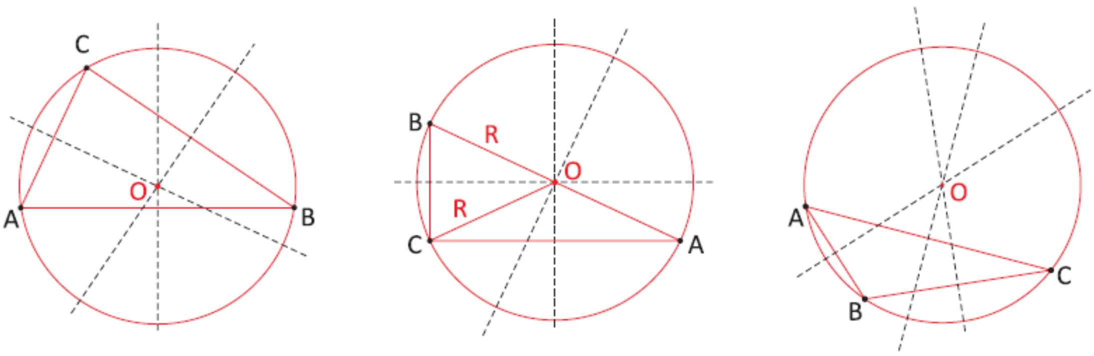
Значајне тачке троугла

Које су значајне тачке троугла? Где се налази центар описане кружнице, а где центар уписане кружнице, ортоцентар, тежиште?

Центар описане кружнице: пресек симетрала страница.

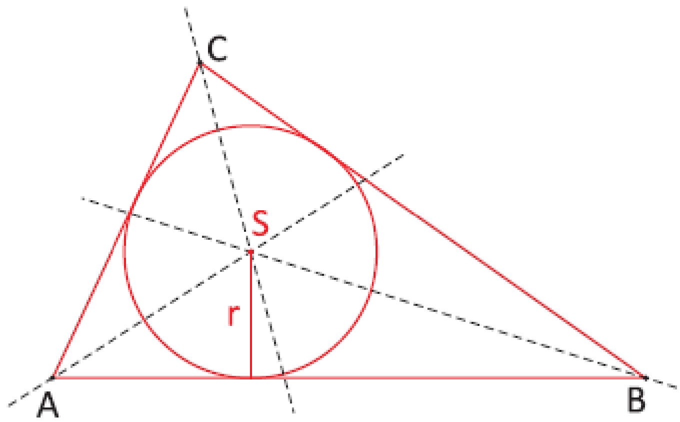
Теорема: Све три симетрале страница секу се у једној тачки.

Конструисати посебно за оштроугли, правоугли и тупоугли троугао. Уочити да је у оштроуглом центар унутар, у правоуглом на средини хипотенузе



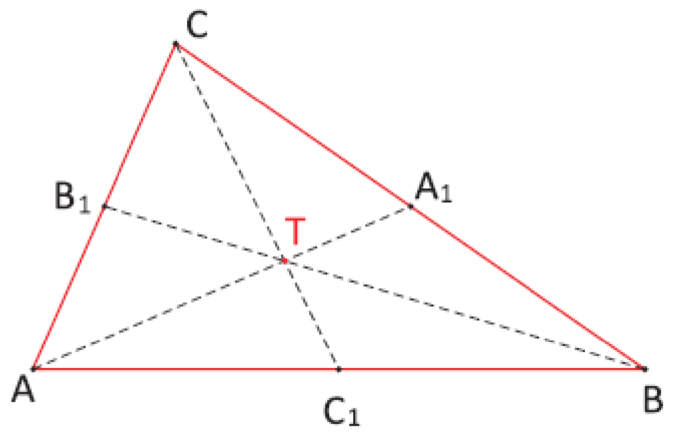
Центар уписане кружнице: пресек симетрала унутрашњих углова.

Теорема: Све три симетрале углова секу се у једној тачки.



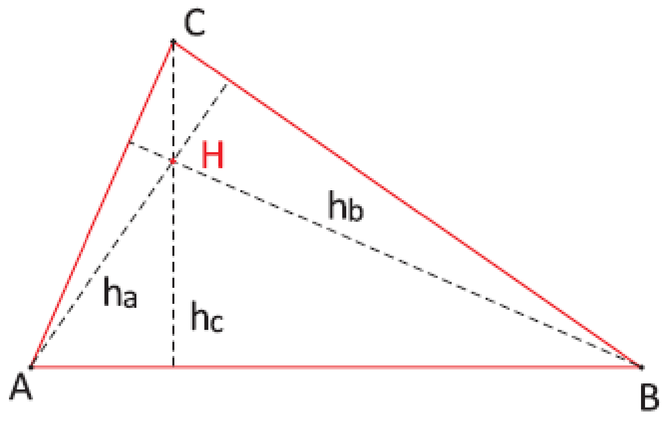
Тежиште: пресек тежишних дужи.

Поновити да тежиште дели тежишну дуж у размери 2: 1. Увек је унутар троугла, па конструисати само за оштроугли.

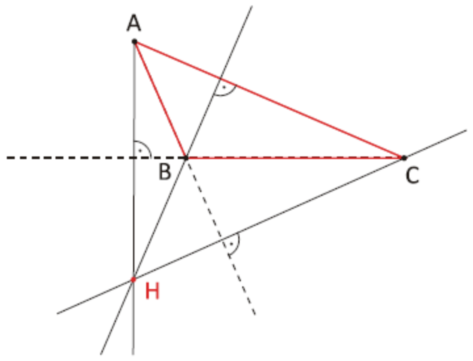


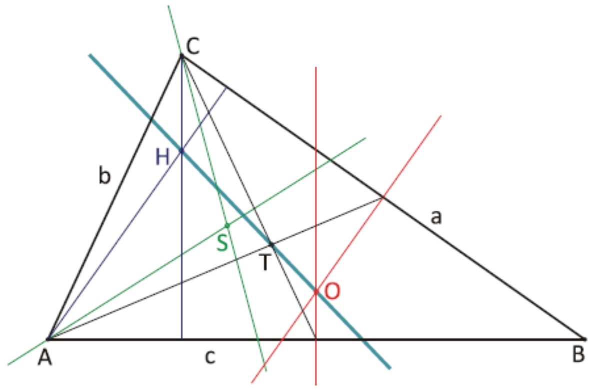
Ортоцентар: пресек висина.

Конструисати за оштроугли и тупоугли, а само констатовати да је код правоуглог троугла у темену правог угла.



Ортоцентар, тежиште и центар описаног круга су колинеарне тачке (**Ојлерова права**).

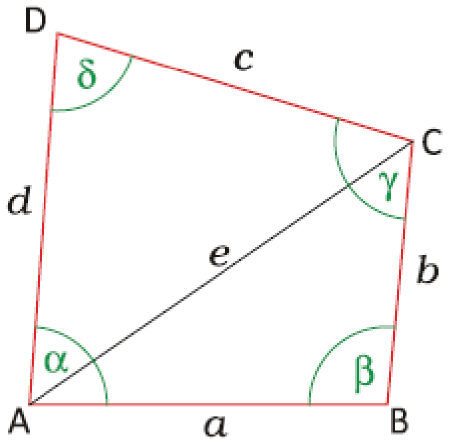




Домаћи задатак: Конструисати једнакокраки и једнакостранични троугао и њихове значајне тачке.

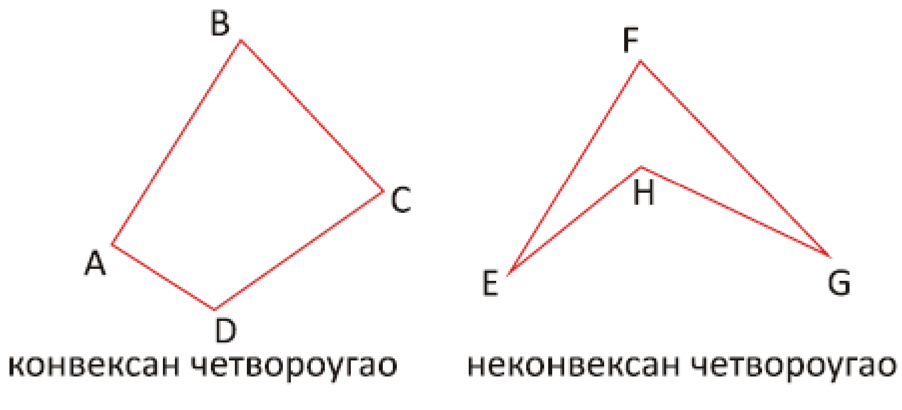
Четвероугао-основни појмови-подела.

Шта је четвороугао? Који су његови основни елементи? Шта је дијагонала?



Теорема: Збир унутрашњих углова четвороугла једнак је пуном углу.

Поделе:
1. - конвексан
   -неконвексан



Према паралелности страница:

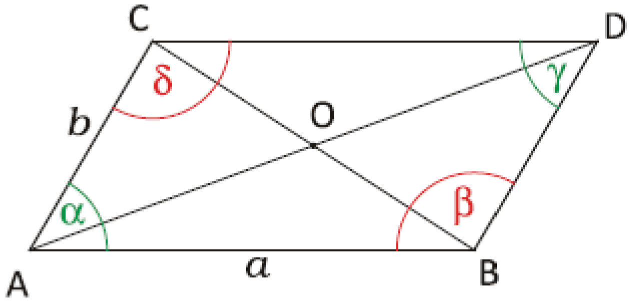
А) **Паралелограм** – четвороугао са два пара паралелних страница

Теорема: Четвороугао је паралелограм акко су му углови на свакој страници суплементни.

Теорема: Четвороугао је паралелограм акко му се дијагонале међусобно полове.

Теорема: Четвороугао је паралелограм акко су му наспрамни углови међусобно једнаки.

Теорема: Четвороугао је паралелограм акко су му наспрамне странице међусобно једнаке.

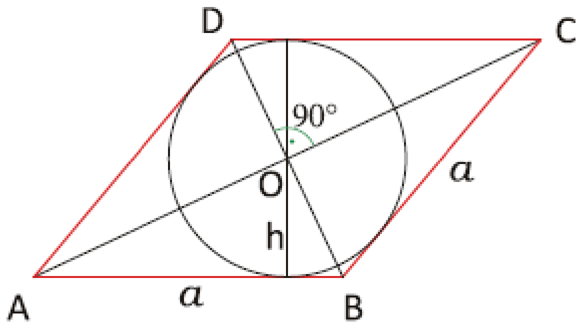


Ромб је паралелограм коме су све странице једнаке.

Теорема: Дијагонала ромба дели угао ромба на два једнака дела.

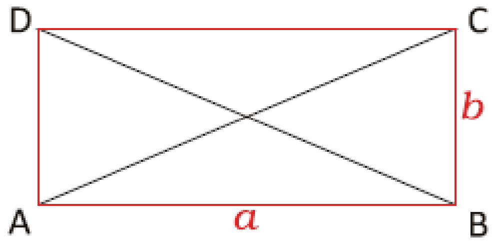
Последица: Пошто је дијагонала истовремено и симетрала угла, ромб има уписани круг. Центар круга је пресек дијагонала, а пречник је једнак висини ромба.

Теорема: Дијагонале ромба су међусобно нормалне.

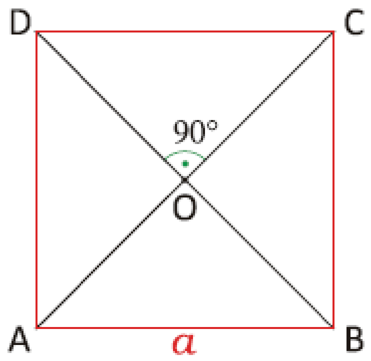


Правоугаоник је паралелограм чији су сви углови међусобно једнаки.

Теорема: Дијагонале правоугаоника су једнаке.



Квадрат је паралелограм коме су све странице и сви углови једнаки. (правилан четвороугао).
Значи, квадрат је и ромб и правоугаоник.
Дијагонале квадрата су једнаке и нормалне међу собом.



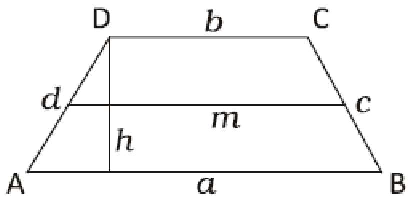
Б) **Трапез** је четвороугао са тачно једним паром паралелних страница.

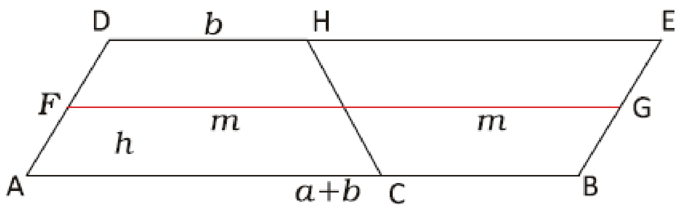
Паралелне странице називамо **основице**, а непаралелне **краци**.

Висина трапеза је растојање између основица.

Средња линија трапеза је дуж чије су крајње тачке средишта кракова.

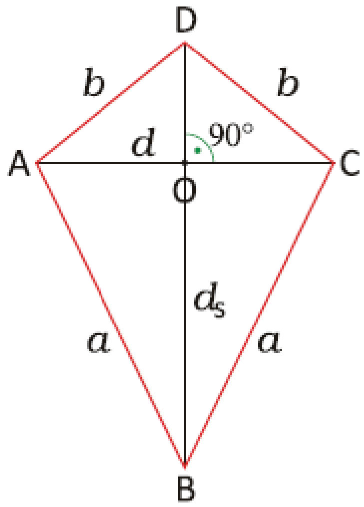
Теорема: Средња линија трапеза једнака је аритметичкој средини основица.





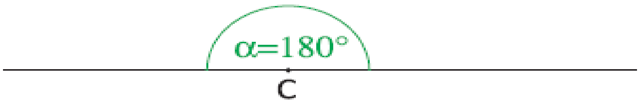
В) **Трапезоид** је четвороугао који нема паралелних страница.
Међу трапезоидима посматраћемо **делтоид**.

Делтоид има међусобно нормалне дијагонале и два пара суседних страница су му једнаке. Углови између страница различите дужине су једнаки. Једна дијагонала је оса симетрије.

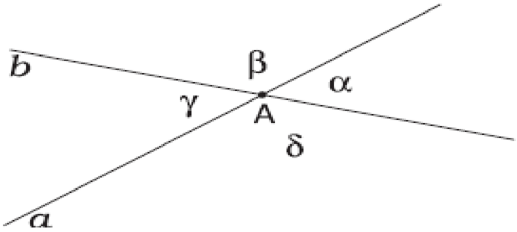


Додатак – понављање из Основне школе- Врсте углова

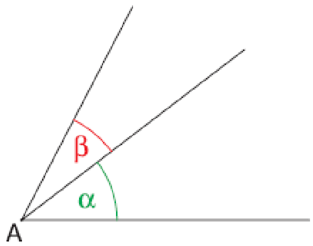
Врсте углова:



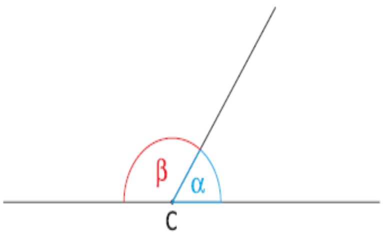
Опружен (раван) угао.



Унакрсни углови



Суседни углови су углови који имају заједнички крак, а области им се налазе са различитих страна тог крака.



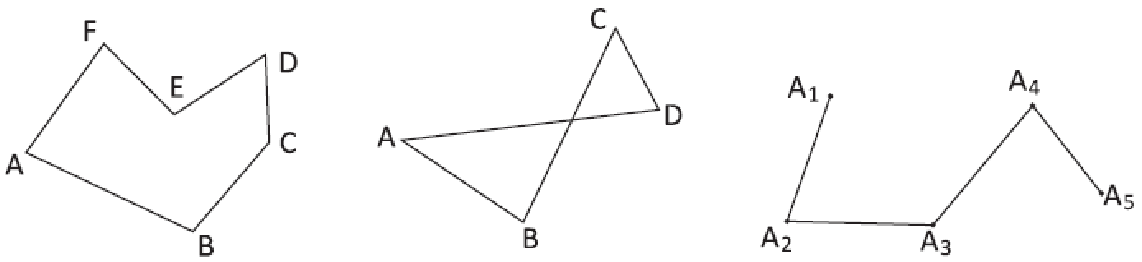
Напоредни (упоредни) углови: суседни углови чија је унија једнака опруженом углу.

Угао који је једнак свом напоредном углу зове се **прав угао.** Нагласити како се означава на цртежу.

Комплементни углови: збир им је једнак $90°$.
Суплементни углови: збир им је једнак $180°$.

<u>Врсте углова по величини:</u> **нула угао**, **оштар**(већи од $0°$, а мањи од $90°$), **прав** ($=90°$), **туп** (већи од $90°$, а мањи од $180°$), **опружен** ($=180°$), **неконвексан** (већи од $180°$, а мањи од $360°$), **пун** ($=360°$)и **уопштен** (већи од $360°$) (илустровати цртежом).

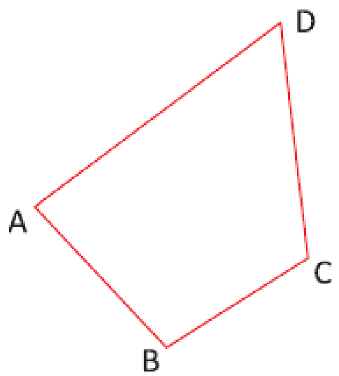
Нека су у равни дате тачке $A_1, A_2, \ldots, A_n; n>2$, такве да никоје (објаснити) три узастопне нису колинеарне. Унија дужи $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup \ldots \cup A_{n-1}, A_n$ зове се **изломљена линија**. Изломљена линија може бити <u>отворена</u> и <u>затворена</u> (ако је $A_1=A_n$ онда је затворена).



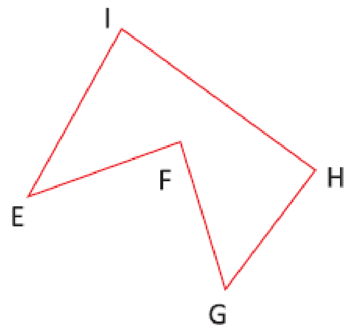
Ако несуседне странице изломљене линије немају заједничких тачака такву линију зовемо **многоугаона линија.**

Унутрашња област многоугаоне линије је скуп тачака са особином да свака полуправа чија је почетна тачка у области сече многоугаону линију непаран број пута.

Многоугао је унија многоугаоне линије и њене унутрашње области.
Многоуглови могу бити **конвексни** и **неконвексни**.



конвексан многоугао



неконвексан многоугао

Правилан многоугао је многоугао коме су све странице међусобно једнаке и сви углови међусобно једнаки.

Задаци за вежбу

Вене : 211-249

451-484

630- 790

Стојановић : 461-490

532- 595

596-650